

© International Baccalaureate Organization 2024

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2024

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2024

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

# Mathematik: Analyse und Ansätze

## Leistungsstufe

### 3. Klausur

29. Oktober 2024

**Zone A** Nachmittag | **Zone B** Nachmittag | **Zone C** Nachmittag

1 Stunde

---

#### Hinweise für die Kandidaten

- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze LS** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[55 Punkte]**.

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Answerheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite. Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, müssen von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

1. [Maximale Punktzahl: 27]

**In dieser Frage sollen Sie Modelle für die Population von Forellen in einem See untersuchen.**

Die Forelle ist eine Fischart. Zu Beginn eines Jahres gibt es in einem See schätzungsweise 6000 Forellen.

Der Besitzer des Sees schätzt, dass die Anzahl der Forellen jährlich um 10% zunimmt.

Am Ende eines jeden Jahres will der Eigentümer 500 Forellen aus dem See entfernen, um eine Überbevölkerung zu verhindern.

Daher gilt für den Zusammenhang zwischen der voraussichtlichen Anzahl  $T_n$  der Forellen zu Beginn des Jahres  $n$  und der voraussichtlichen Anzahl  $T_{n+1}$  der Forellen zu Beginn des Jahres  $n + 1$ :

$$T_{n+1} = 1,1T_n - 500 \text{ und } T_1 = 6000.$$

Die voraussichtliche Anzahl der Forellen zu Beginn des zweiten Jahres ist zum Beispiel gegeben durch:

$$T_2 = 1,1T_1 - 500.$$

- (a) Validieren Sie mit Hilfe dieser Gleichung, dass  $T_2 = 6100$  gilt. [2]
- (b) (i) Validieren Sie, dass  $T_3 = 6210$  gilt. [1]
- (ii) Finden Sie  $T_4$ . [2]

Es ist auch bekannt, dass  $T_n = 6000(1,1)^{n-1} - \frac{500((1,1)^{n-1} - 1)}{1,1 - 1}$ .

- (c) (i) Zeigen Sie, dass  $T_n = 1000(1,1)^{n-1} + 5000$  gilt. [2]
- (ii) Finden Sie unter Verwendung der Vorarbeit oder mittels einer anderen Methode  $T_6$ . Geben Sie Ihre Antwort gerundet auf die nächste ganze Zahl an. [2]

**(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)**

**(Fortsetzung Frage 1)**

Nachdem der Besitzer des Sees erkannt hat, dass die Forellenpopulation zu schnell ansteigen würde, denkt er darüber nach, am Ende eines jeden Jahres 750 Forellen zu entnehmen.

Für den Zusammenhang zwischen der voraussichtlichen Anzahl  $D_n$  zu Beginn des Jahres  $n$  und der voraussichtlichen Anzahl  $D_{n+1}$  zu Beginn des Jahres  $n + 1$  gilt nun:

$$D_{n+1} = 1,1D_n - 750 \text{ und } D_1 = 6000.$$

Es ist auch bekannt, dass  $D_n = -1500(1,1)^{n-1} + 7500$ .

- (d) (i) Zeigen Sie, dass  $D_{n+1} - D_n = -150(1,1)^{n-1}$  gilt. [3]
- (ii) Deduzieren Sie aus dem Ergebnis von Teil (d)(i), dass die voraussichtliche Anzahl der Forellen zu Beginn eines Jahres größer ist als die voraussichtliche Anzahl zu Beginn des nächsten Jahres. [1]
- (e) Bestimmen Sie das erste Jahr, in dem es keine Forellen mehr im See geben wird. [4]

Der Besitzer des Sees erwägt nun einen allgemeineren Ansatz, bei dem am Ende eines jeden Jahres  $d$  Forellen aus dem See entnommen werden.

$C_n$  sei die voraussichtliche Anzahl an Forellen im See zu Beginn des  $n$ -ten Jahres, und es gilt:

$$C_n = 6000(1,1)^{n-1} - 10d((1,1)^{n-1} - 1).$$

- (f) Finden Sie den Wert von  $d$  so, dass die voraussichtliche Anzahl an Forellen zu Beginn eines jeden Jahres konstant ist. [3]

Der Besitzer des Sees modelliert die voraussichtliche Anzahl an Forellen mit Hilfe von Zahlenfolgen nach folgender Vorschrift:

$$u_{n+1} = ru_n - d \text{ mit } d, r \in \mathbb{R}^+ \text{ und } r \neq 1.$$

- (g) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass  $u_n = u_1 r^{n-1} - \frac{d(r^{n-1} - 1)}{r - 1}$  für  $n \in \mathbb{Z}^+$ . [7]

2. [Maximale Punktzahl: 28]

**Ein Polynom wird Palindrompolynom genannt, wenn die Reihenfolge seiner Koeffizienten in umgekehrter Richtung gleich bleibt. In dieser Frage sollen Sie einige Eigenschaften und Lösungen von palindromischen Polynomgleichungen untersuchen.**

In den Teilen (a) und (b) sollen sie quadratische Gleichungen der Form  $ax^2 + bx + a = 0$  mit  $a \neq 0$  untersuchen.

Die Reihenfolge der Koeffizienten  $\{a, b, a\}$  bleibt auch in umgekehrter Richtung gleich.

Die folgende Tabelle zeigt drei palindromische quadratische Gleichungen und die Abfolge ihrer Koeffizienten.

Palindromische quadratische Gleichung	Abfolge der Koeffizienten
$2x^2 - 5x + 2 = 0$	$\{2, -5, 2\}$
$x^2 + 4x + 1 = 0$	$\{1, 4, 1\}$
$x^2 + 1 = 0$	$\{1, 0, 1\}$

Die quadratische Gleichung  $2x^2 - 5x + 2 = 0$  hat die Lösungen 2 and  $\frac{1}{2}$ .

Diese Lösungen bilden ein „reziprokes Paar“, da die eine Lösung dem Kehrwert der anderen entspricht.

(a) (i) Bestimmen Sie die Lösungen von  $x^2 + 4x + 1 = 0$ .

Geben Sie diese Lösungen in der Form  $s \pm \sqrt{t}$  an, mit  $s \in \mathbb{Z}$  und  $t \in \mathbb{Z}^+$ . [3]

(ii) Zeigen Sie unter Nutzung der Vorarbeit oder mittels einer anderen Methode, dass diese Lösungen ein reziprokes Paar bilden. [2]

(b) Zeigen Sie, dass die komplexen Lösungen von  $x^2 + 1 = 0$  ein reziprokes Paar bilden. [2]

Es sei  $p(x) = ax^2 + bx + a$  mit  $a \neq 0$ .

(c) Validieren Sie, dass  $p(x) = x^2 p\left(\frac{1}{x}\right)$  mit  $x \neq 0$  gilt. [2]

**(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)**

**(Fortsetzung Frage 2)**

Gehen Sie für die Teile (d) und (e) davon aus, dass ein Polynom  $p(x)$  mit dem Grad  $n$  genau dann Palindrompolynom ist, wenn  $p(x) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$  gilt.

- (d) Zeigen Sie mit Hilfe von  $p(x) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$ : Falls  $\alpha \neq 0$  eine Lösung von  $p(x) = 0$  ist, dann ist auch  $\frac{1}{\alpha}$  eine Lösung. [2]

Es sei  $f(x) = p(x)q(x)$ , wobei  $p$  und  $q$  Palindrompolynome des Grads  $n$  bzw.  $m$  sind.

- (e) Zeigen Sie, dass  $f$  ein palindromisches Polynom ist. [4]

Betrachten Sie das Palindrompolynom  $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1$ .

Dieses Polynom kann in folgender Form geschrieben werden:

$$f(x) = (x^2 + ux + 1)(x^2 + vx + 1) \text{ mit } u, v \in \mathbb{Z} \text{ und } u < v.$$

- (f) Stellen Sie ein geeignetes Gleichungssystem in  $u$  und  $v$  auf und bestimmen Sie die Werte von  $u$  und  $v$  durch Lösen dieses Gleichungssystems. [6]
- (g) Finden Sie unter Verwendung der Vorarbeit alle exakten komplexen und rein reellen Lösungen von  $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$ . [3]

Betrachten Sie die palindromische Polynomgleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + 1 = 0 \text{ mit ungeradem } n.$$

- (h) Zeigen Sie, dass  $-1$  immer eine Lösung dieser Gleichung ist. [4]
-