Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
3. Klausur

29. Oktober 2024

Zone A Nachmittag | **Zone B** Nachmittag | **Zone C** Nachmittag

1 Stunde

Hinweise für die Kandidaten

- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze LS** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[55 Punkte]**.

8824 – 9717

5 Seiten

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite. Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, müssen von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

1. [Maximale Punktzahl: 27]

In dieser Frage sollen Sie Modelle für die Population von Forellen in einem See untersuchen.

Die Forelle ist eine Fischart. Zu Beginn eines Jahres gibt es in einem See schätzungsweise 6000 Forellen.

Der Besitzer des Sees schätzt, dass die Anzahl der Forellen jährlich um $10\,\%$ zunimmt.

Am Ende eines jeden Jahres will der Eigentümer 500 Forellen aus dem See entfernen, um eine Überbevölkerung zu verhindern.

Daher gilt für den Zusammenhang zwischen der voraussichtlichen Anzahl T_n der Forellen zu Beginn des Jahres n und der voraussichtlichen Anzahl T_{n+1} der Forellen zu Beginn des Jahres $n+1$:

$$T_{n+1} = 1{,}1T_n - 500 \text{ und } T_1 = 6000.$$

Die voraussichtliche Anzahl der Forellen zu Beginn des zweiten Jahres ist zum Beispiel gegeben durch:

$$T_2 = 1{,}1T_1 - 500.$$

(a) Validieren Sie mit Hilfe dieser Gleichung, dass $T_2 = 6100$ gilt. [2]

(b) (i) Validieren Sie, dass $T_3 = 6210$ gilt. [1]

(ii) Finden Sie T_4. [2]

Es ist auch bekannt, dass $T_n = 6000(1{,}1)^{n-1} - \dfrac{500\left((1{,}1)^{n-1} - 1\right)}{1{,}1 - 1}$.

(c) (i) Zeigen Sie, dass $T_n = 1000(1{,}1)^{n-1} + 5000$ gilt. [2]

(ii) Finden Sie unter Verwendung der Vorarbeit oder mittels einer anderen Methode T_6. Geben Sie Ihre Antwort gerundet auf die nächste ganze Zahl an. [2]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 1)

Nachdem der Besitzer des Sees erkannt hat, dass die Forellenpopulation zu schnell ansteigen würde, denkt er darüber nach, am Ende eines jeden Jahres 750 Forellen zu entnehmen.

Für den Zusammenhang zwischen der voraussichtlichen Anzahl D_n zu Beginn des Jahres n und der voraussichtlichen Anzahl D_{n+1} zu Beginn des Jahres $n+1$ gilt nun:

$$D_{n+1} = 1{,}1D_n - 750 \text{ und } D_1 = 6000\,.$$

Es ist auch bekannt, dass $D_n = -1500\,(1{,}1)^{n-1} + 7500$.

(d) (i) Zeigen Sie, dass $D_{n+1} - D_n = -150\,(1{,}1)^{n-1}$ gilt. [3]

(ii) Deduzieren Sie aus dem Ergebnis von Teil (d)(i), dass die voraussichtliche Anzahl der Forellen zu Beginn eines Jahres größer ist als die voraussichtliche Anzahl zu Beginn des nächsten Jahres. [1]

(e) Bestimmen Sie das erste Jahr, in dem es keine Forellen mehr im See geben wird. [4]

Der Besitzer des Sees erwägt nun einen allgemeineren Ansatz, bei dem am Ende eines jeden Jahres d Forellen aus dem See entnommen werden.

C_n sei die voraussichtliche Anzahl an Forellen im See zu Beginn des n-ten Jahres, und es gilt:

$$C_n = 6000\,(1{,}1)^{n-1} - 10d\left((1{,}1)^{n-1} - 1\right).$$

(f) Finden Sie den Wert von d so, dass die voraussichtliche Anzahl an Forellen zu Beginn eines jeden Jahres konstant ist. [3]

Der Besitzer des Sees modelliert die voraussichtliche Anzahl an Forellen mit Hilfe von Zahlenfolgen nach folgender Vorschrift:

$$u_{n+1} = ru_n - d \text{ mit } d,\, r \in \mathbb{R}^+ \text{ und } r \neq 1\,.$$

(g) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $u_n = u_1 r^{n-1} - \dfrac{d\left(r^{n-1} - 1\right)}{r-1}$ für $n \in \mathbb{Z}^+$. [7]

2. [Maximale Punktzahl: 28]

Ein Polynom wird Palindrompolynom genannt, wenn die Reihenfolge seiner Koeffizienten in umgekehrter Richtung gleich bleibt. In dieser Frage sollen Sie einige Eigenschaften und Lösungen von palindromischen Polynomgleichungen untersuchen.

In den Teilen (a) und (b) sollen sie quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx + a = 0$ mit $a \neq 0$ untersuchen.

Die Reihenfolge der Koeffizienten $\{a, b, a\}$ bleibt auch in umgekehrter Richtung gleich.

Die folgende Tabelle zeigt drei palindromische quadratische Gleichungen und die Abfolge ihrer Koeffizienten.

Palindromische quadratische Gleichung	**Abfolge der Koeffizienten**
$2x^2 - 5x + 2 = 0$	$\{2, -5, 2\}$
$x^2 + 4x + 1 = 0$	$\{1, 4, 1\}$
$x^2 + 1 = 0$	$\{1, 0, 1\}$

Die quadratische Gleichung $2x^2 - 5x + 2 = 0$ hat die Lösungen 2 and $\frac{1}{2}$.

Diese Lösungen bilden ein „reziprokes Paar“, da die eine Lösung dem Kehrwert der anderen entspricht.

(a) (i) Bestimmen Sie die Lösungen von $x^2 + 4x + 1 = 0$.

Geben Sie diese Lösungen in der Form $s \pm \sqrt{t}$ an, mit $s \in \mathbb{Z}$ und $t \in \mathbb{Z}^+$. [3]

(ii) Zeigen Sie unter Nutzung der Vorarbeit oder mittels einer anderen Methode, dass diese Lösungen ein reziprokes Paar bilden. [2]

(b) Zeigen Sie, dass die komplexen Lösungen von $x^2 + 1 = 0$ ein reziprokes Paar bilden. [2]

Es sei $p(x) = ax^2 + bx + a$ mit $a \neq 0$.

(c) Validieren Sie, dass $p(x) = x^2 p\left(\frac{1}{x}\right)$ mit $x \neq 0$ gilt. [2]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 2)

Gehen Sie für die Teile (d) und (e) davon aus, dass ein Polynom $p(x)$ mit dem Grad n genau dann Palindrompolynom ist, wenn $p(x) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$ gilt.

(d) Zeigen Sie mit Hilfe von $p(x) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$: Falls $\alpha \neq 0$ eine Lösung von $p(x) = 0$ ist, dann ist auch $\frac{1}{\alpha}$ eine Lösung. [2]

Es sei $f(x) = p(x)q(x)$, wobei p und q Palindrompolynome des Grads n bzw. m sind.

(e) Zeigen Sie, dass f ein palindromisches Polynom ist. [4]

Betrachten Sie das Palindrompolynom $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1$.

Dieses Polynom kann in folgender Form geschrieben werden:

$$f(x) = (x^2 + ux + 1)(x^2 + vx + 1) \text{ mit } u, v \in \mathbb{Z} \text{ und } u < v.$$

(f) Stellen Sie ein geeignetes Gleichungssystem in u und v auf und bestimmen Sie die Werte von u und v durch Lösen dieses Gleichungssystems. [6]

(g) Finden Sie unter Verwendung der Vorarbeit alle exakten komplexen und rein reellen Lösungen von $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$. [3]

Betrachten Sie die palindromische Polynomgleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + 1 = 0 \text{ mit ungeradem } n.$$

(h) Zeigen Sie, dass -1 immer eine Lösung dieser Gleichung ist. [4]